EXERCICE N° 1 : (6 POINTS)

La température de refroidissement d'une pâtisserie à la sortie du four dépend du type de pâtisserie et de la température ambiante supposée constante de la pièce dans laquelle elle est entreposée.
La température d'une tarte à la sortie du four est de 180°C.
L'évolution de la température de la tarte en fonction du temps est modélisée par la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+1} = 0,84 \times T_n + 3,2$$

Pour tout entier naturel n, le terme T_n de la suite (T_n) est égal à la température en degrés Celsius de la tarte n minutes après la sortie du four.

Partie A

La tarte peut être sortie de son moule dès que sa température est inférieure à 80°C
Pour déterminer au bout de combien de minutes la tarte peut être démoulée, on utilise un algorithme.

1. Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche la réponse.

VARIABLES :	N est un entier naturel
	T est un nombre réel
INITIALISATION :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à T la valeur ...
TRAITEMENT :	Tant que T ......
	Affecter à T la valeur ...
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher N

2. Recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité.

Valeur de N	0	1	...	
Valeur de T	180		...	
Condition $T \geqslant 80$	Vraie		...	

3. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

1. Pour tout nombre entier naturel n, on définit la suite (V_n) par : $V_n = T_n - 20$.
   (a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer V_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 160 \times 0,84^n + 20$.

2. Étudier la monotonie de la suite (T_n).

3. Calculer la limite de la suite (T_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE N° 2 : (4 POINTS) QCM

Pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Vous répondrez sur votre copie en indiquant le numéro de la question et la lettre correspondant à votre réponse.

1. On considère la suite u définie par $u_n = \dfrac{3n+n^2}{n-n^3}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$	b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2. Une suite (u_n) est convergente et majorée par 3. Alors nécessairement :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 3$	b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$	c. la suite u_n est croissante

3. Soit u la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^n}$ avec $n \geq 1$ alors :

a.la suite u converge vers $\dfrac{3}{2}$	b. la suite u converge vers $\dfrac{1}{2}$	c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4. Si pour tout entier naturel n, $v_n \leq u_n \leq w_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$, alors :

a. la suite (u_n) est convergente	b. la suite (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$	c. la suite (u_n) n 'a pas de limite

EXERCICE N° 3 : (3 POINTS)

Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 1 par : $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Montrer par **récurrence** que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$
3. La suite (S_n) converge-t-elle ?

EXERCICE N° 4 : (4 POINTS)

On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la suite (u_n) par :

$$u_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 sous forme d'une fraction irréductible.
2. Démontrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{n+1}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$$

Conjecturer l'expression de S_n en fonction de n. Justifier cette conjecture.

EXERCICE N° 5 : (ROC : 3 POINTS)

Démontrer que pour tout réel $a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ pour $q > 1$. (Poser $q = 1 + a$).

EXERCICE N° 6 : (BONUS : PROBLÈME OUVERT/2 POINTS) *Toute trace de recherche sera prise en compte dans la notation*

Déterminer le reste de la division euclidienne de $9^n - 1$ par 8 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Compétences	Acquis	En cours d'acquisition	non acquis
Savoir montrer qu'une suite est géométrique (**EXO 1) question B)1)a)**)			
Connaitre la limite de q^n (**EXO 1) question B) 3)**)			
Savoir calculer une limite (**EXO 2 question 1**)			
Savoir utiliser le théorème de convergence monotone (**EXO 3 question 3**)			
Savoir rédiger une preuve par récurrence (**EXO 4 question 2)**)			

Compétences	Acquis	En cours d'acquisition	non acquis
Savoir montrer qu'une suite est géométrique (**EXO 1) question B)1)a)**)			
Connaitre la limite de q^n (**EXO 1) question B) 3)**)			
Savoir calculer une limite (**EXO 2 question 1**)			
Savoir utiliser le théorème de convergence monotone (**EXO 3 question 3**)			
Savoir rédiger une preuve par récurrence (**EXO 4 question 2)**)			